Exercice 1:

1. $\mathbf{e}^{-x} \underset{0}{=} 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$ donc $x\mathbf{e}^{-x} \underset{0}{=} x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)$.

2. $\sin(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^6)$ donc $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + \mathcal{O}(x^5)$.
   $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)$.
   Par produit,
$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x}\ln(1+x) &\underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathcal{O}(x^5)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)\right) \\ &\underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \frac{163}{360}x^5 + \mathcal{O}(x^5)\,. \end{aligned}$$

3. $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1-x) \underset{0}{=} x^2 - \dfrac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^5) - \left(-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)\right)$
   $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right) \underset{0}{=} x + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)$

4. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x)} \underset{0}{=} \dfrac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^5)}{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)} \underset{0}{=} \dfrac{x - \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)}{-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^2)} \underset{0}{=} \dfrac{-x + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^2)}$
   $k(x) \underset{0}{=} (-x + \dfrac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3))(1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^3))$.
   $k(x) \underset{0}{=} -x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7x^3}{12} + \mathcal{O}(x^3)$.

Exercice 2: On applique la formule de Taylor-Young car les fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1. $f(x) \underset{0}{=} \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\dfrac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2} + \sin^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\dfrac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{6} + \mathcal{O}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3\right)$
   $\underset{0}{=} \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3\right)$

2. $g(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{4}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^3\right)$

3. On doit calculer les 2 premières dérivées de h.
$$\begin{aligned} h(x) &= \mathbf{e}^{\sqrt{x}},\ h'(x) = \frac{\mathbf{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}},\ h''(x) = \frac{\mathbf{e}^{\sqrt{x}} - \frac{\mathbf{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} \\ h(1) &= \mathbf{e},\ h'(1) = \frac{\mathbf{e}}{2},\ h''(1) = 0 \end{aligned}$$
   Donc, $h(x) \underset{0}{=} \mathbf{e} + \dfrac{\mathbf{e}}{2}(x-1) + \mathcal{O}((x-1)^2)$.

4. On doit calculer les 2 premières dérivées de k.
$$\begin{aligned} k(x) &= \ln(1+\sqrt{x}),\ k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})},\ h''(x) = -\frac{1}{2}.\frac{\frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x(1+\sqrt{x})^2} \\ k(1) &= \ln(2),\ k'(1) = \frac{1}{4},\ k''(1) = -\frac{3}{16} \end{aligned}$$
   Donc, $k(x) \underset{0}{=} \ln(2) + \dfrac{1}{4}(x-1) - \dfrac{3}{32}(x-1)^2 + \mathcal{O}((x-1)^2)$.

Exercice 3:

1. $f(x) = \ln(2+\sin(x)) = \ln\left(2\left(1+\frac{\sin(x)}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{\sin(x)}{2}\right) \underset{0}{=} \ln(2) + \ln\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\mathcal{O}(x^3)\right)$.

$$\begin{aligned} u(x) &\underset{0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\mathcal{O}(x^3) \\ u(x)^2 &\underset{0}{=} \frac{x^2}{4}+\mathcal{O}(x^3) \\ u(x)^3 &\underset{0}{=} \frac{x^3}{8}+\mathcal{O}(x^3) \\ \mathcal{O}(u(x)^3) &\underset{0}{=} \mathcal{O}(x^3) \end{aligned}$$

Donc, $f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \mathcal{O}(x^3) \underset{0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + \mathcal{O}(x^3)$.

2. $g(x) \underset{0}{=} \mathbf{e}^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathcal{O}(x^3)} \underset{0}{=} \mathbf{e}.\mathbf{e}^{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathcal{O}(x^3)}$

$$\begin{aligned} u(x) &\underset{0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathcal{O}(x^3) \\ u(x)^2 &\underset{0}{=} \frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\mathcal{O}(x^3) \\ u(x)^3 &\underset{0}{=} \frac{x^3}{8}+\mathcal{O}(x^3) \\ \mathcal{O}(u(x)^3) &\underset{0}{=} \mathcal{O}(x^3) \end{aligned}$$

Donc, $g(x) \underset{0}{=} \mathbf{e}.(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\frac{x^3}{48}+\mathcal{O}(x^3)) \underset{0}{=} \mathbf{e} + \frac{\mathbf{e}x}{2} + \frac{\mathbf{e}x^3}{48} + \mathcal{O}(x^3)$

3. $h(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) \underset{0}{=} \exp\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\mathcal{O}(x^2)\right) \underset{0}{=} \mathbf{e}.\left(1+u(x)+\frac{u(x)^2}{2}+\mathcal{O}(u(x)^2)\right)$

$$\begin{aligned} \text{où } u(x) &\underset{0}{=} -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\mathcal{O}(x^2) \\ u(x)^2 &\underset{0}{=} \frac{x^2}{4}+\mathcal{O}(x^2) \\ \mathcal{O}(u(x)^2) &\underset{0}{=} \mathcal{O}(x^2) \end{aligned}$$

Donc, $h(x) = \mathbf{e}.\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+\mathcal{O}(x^2)\right) \underset{0}{=} \mathbf{e} - \frac{\mathbf{e}x}{2} + \frac{11\mathbf{e}x^2}{24} + \mathcal{O}(x^2)$.

4. $k(x) = \exp\left(x\ln(\sqrt{1+x})\right) \underset{0}{=} \exp\left(x\ln\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathcal{O}(x^3)\right)\right)$.
Considérons $u(x) = \frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathcal{O}(x^3)$
$\ln\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathcal{O}(x^3)\right) \underset{0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{8}\right)+\mathcal{O}(x^3) \underset{0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{24}+\mathcal{O}(x^3)$.
$\exp\left(x\ln\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathcal{O}(x^3)\right)\right) \underset{0}{=} \exp\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+\mathcal{O}(x^3)\right)$
Posons $u(x) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+\mathcal{O}(x^3)$.
Donc, $k(x) \underset{0}{=} \exp\left(x\ln\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathcal{O}(x^3)\right)\right) \underset{0}{=} 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+\mathcal{O}(x^3)$

Exercice 4: La fonction Arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall x \in]-1;1[$, $\text{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} \underset{0}{=} -1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Par primitivation,
$\text{Arccos}(x) \underset{0}{=} \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Exercice 5: D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f : x \mapsto \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{3-x}.$$

On trouve alors $a = \frac{1}{16}$, $b = \frac{1}{4}$ et $c = \frac{1}{16}$.
D'où,

$$f : x \mapsto \frac{1}{16} \times \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{48} \times \frac{1}{1-\frac{x}{3}}.$$

Au voisinage de 0, on a donc :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{16}\left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right) + \frac{1}{4}\left(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + o(x^3)\right) + \frac{1}{48}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + o(x^3)\right)$$

D'où

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} - \frac{80}{144}x + \frac{352}{432}x^2 - \frac{1376}{1296}x^3 + o(x^3).$$

Conclusion, au voisinage de 0, on a :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} - \frac{5}{9}x + \frac{22}{27}x^2 - \frac{86}{81}x^3 + o(x^3).$$

Exercice 6: On souhaite étudier la fonction $x \mapsto \text{Arctan}(\mathbf{e}^x)$.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^{2x}}$$

2. On va déterminer un DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction f'.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^{2x}} &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 + 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)} \\
&= \frac{1}{2}.\frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 + x + x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2}.(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))(1 - x - x^2 + x^2 + o(x^2)) \\
&= \frac{1}{2}.(1 - x + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)
\end{aligned}$$

Par intégration,

$$\text{Arctan}(\mathbf{e}^x) = \text{Arctan}(\mathbf{e}^0) + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

3. La tangente a pour équation $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}$. Puisque la quantité $-\dfrac{x^3}{12}$ change de signe autour de 0, la courbe de la fonction f coupe la tangente.

Exercice 7: Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\mathbf{e}^{\sin(x)}} \end{cases}$

1. On va déterminer un $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction f.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{\sin(x)} &\underset{0}{=} \exp(x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^3)) = 1+x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^3)+\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^3)\right)^2+\mathcal{O}(x^3)\\
&\underset{0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^2)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathbf{e}^{\sin(x)}} &\underset{0}{=} \sqrt{1+x+\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^2)}\\
&\underset{0}{=} 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{8}+\mathcal{O}(x^2) = 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\mathcal{O}(x^2)
\end{aligned}$$

La tangente à la courbe est donc la droite d'équation $y = 1+\frac{x}{2}$.

2. Le signe de $f(x)-(1+\frac{x}{2})$ nous permet de déterminer la position de la droite par rapport à la courbe.
On a $f(x)-\left(1+\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{8}$ donc $x \mapsto f(x)-\left(1+\frac{x}{2}\right)$ est positive au voisinage de 0.
La courbe de f est au dessus de la tangente en 0.

Exercice 8: On va déterminer un équivalent en 0 de chacune de ces fonctions.

1.

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) &\underset{0}{=} \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^2)\right) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^2) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}\\
\sin(x) &\underset{0}{\sim} x\\
\frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)} &\underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x} \underset{0}{\sim} -\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

Or, des fonctions équivalentes ont la même limite donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)} = 0$.

2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)-1 &\underset{0}{=} \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+1-x+\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^2)}{2}-1 \underset{0}{=} \frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^2) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}\\
\frac{\sqrt{\mathrm{ch}(x)-1}}{x} &\underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}{x}
\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\mathrm{ch}(x)-1}}{x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\mathrm{ch}(x)-1}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x)-\sin(x) &\underset{0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^3)-(x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^3)) = \frac{x^3}{3}+\mathcal{O}(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}\\
\ln(1+x^3) &\underset{0}{\sim} x^3\\
\frac{\mathrm{sh}(x)-\sin(x)}{\ln(1+x^3)} &\underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x)-\sin(x)}{\ln(1+x^3)} = \frac{1}{3}$.

4.

$$\begin{array}{rcl}
(\cos(x)+\sin(x))^{\frac{1}{\tan(x)}} & = & \exp\left(\dfrac{1}{\tan(x)}\ln(\cos(x)+\sin(x))\right) \\
\ln(\cos(x)+\sin(x)) & \underset{0}{=} & \ln(1+x+o(x)) \underset{0}{\sim} x \\
\dfrac{1}{\tan(x)}\ln(\cos(x)+\sin(x)) \underset{0}{\sim} 1 & &
\end{array}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\tan(x)}\ln(\cos(x)+\sin(x)) = 1$. Par composition, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x)+\sin(x))^{\frac{1}{\tan(x)}} = \mathbf{e}$.

Exercice 9: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathbf{e} = \mathbf{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})} - \mathbf{e} = \mathbf{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - \mathbf{e} = \mathbf{e}\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{\mathbf{e}}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.
D'où $u_n \sim -\frac{\mathbf{e}}{2n}$.

Exercice 10:

Les DL à l'ordre 3 et à l'ordre 5 ne vont pas permettre de conclure. Il faut aller jusqu'à l'ordre 7.

$$\begin{array}{rcl}
\sin(x) & \underset{0}{=} & x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + o\left(x^7\right) \\
\tan(x) & \underset{0}{=} & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315} + o\left(x^7\right) \\
\sin(\tan(x)) & \underset{0}{=} & \sin(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315} + o\left(x^7\right)) \\
 & \underset{0}{=} & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315} - \dfrac{1}{6}\left(x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}\right)^3 + \dfrac{1}{120}\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)^5 + \dfrac{x^7}{7!} + o\left(x^7\right) \\
\tan(\sin(x)) & \underset{0}{=} & \tan\left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + o\left(x^7\right)\right) \\
 & \underset{0}{=} & x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{1}{3}\left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!}\right)^3 + \dfrac{2}{15}\left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)^5 - \dfrac{17}{315}(x)^7 + o\left(x^7\right) \\
\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x)) & \underset{0}{=} & -\dfrac{x^7}{30} + o\left(x^7\right)
\end{array}$$

donc $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x)) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^7}{30}$.

Exercice 11:

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{ch}(x) + x\mathrm{sh}(x)$$

Or, $x \mapsto x$ et sh sont de même signe donc $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$.

2. Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que f' ne s'annule pas alors la fonction f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. On cherche un DL à l'ordre 5 en $x=0$ de la fonction f^{-1} sous la forme

$$f^{-1}(y) \underset{y\to 0}{=} a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + a_5 y^5 + o\left(y^5\right)$$

La fonction f^{-1} est impaire donc $a_0 = a_2 = a_4 = 0$.

On part du $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction f donné par

$$f(x) = x\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} x\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^4)\right) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}+\mathcal{O}(x^5)$$

De plus, $\forall x\in\mathbb{R},\ f^{-1}(f(x)) = x = x+\mathcal{O}(x^5)$ donc on va composer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de f^{-1} par $f(x)$.

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & \underset{0}{=} & x+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{24}+\mathcal{O}(x^5) \\
f(x)^3 & \underset{0}{=} & x^3+\dfrac{3}{2}x^5+\mathcal{O}(x^5) \\
f(x)^5 & \underset{0}{=} & x^5+\mathcal{O}(x^5) \\
\mathcal{O}(f(x)^5) & \underset{0}{=} & \mathcal{O}(x^5) \\
f^{-1}(f(x)) & \underset{0}{=} & a_1\left(x+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{24}\right)+a_3\left(x^3+\dfrac{3}{2}x^5\right)+a_5x^5+\mathcal{O}(x^5) \\
 & \underset{0}{=} & a_1x+\left(\dfrac{a_1}{2}+a_3\right)x^3+\left(\dfrac{a_1}{24}+\dfrac{3}{2}a_3+a_5\right)x^5+\mathcal{O}(x^5)
\end{array}$$

Par unicité du $\mathrm{DL}_5(0)$ de f^{-1}, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \dfrac{a_1}{2}+a_3 = 0 \\ \dfrac{a_1}{24}+\dfrac{3}{2}a_3+a_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\dfrac{1}{2} \\ a_5 = \dfrac{17}{24} \end{cases}$$

Finalement,

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{1}{2}x^3+\frac{17}{24}x^5+\mathcal{O}(x^5)$$

Exercice 12: $u_n = \mathbf{e}^{1/n}-\dfrac{n(n+1)}{1+n^2} = \mathbf{e}^{1/n}-\dfrac{(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n^2}} = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)-(1+\frac{1}{n})\left(1-\frac{1}{n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{3}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
D'où $u_n \sim \frac{3}{2n^2}$.

Exercice 13: La fonction f est continue sur $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$.
Pour tout $x\in]-1;+\infty[\setminus\{0\}$, $f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$.
Or $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et $\ln(1+x)-x = -\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ donc $\ln(1+x)-x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
D'où $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}$. Donc $f : x\mapsto \frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 14: Considérons $(E) :\ xy'+y = e^x$. Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$:
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{x\mapsto \frac{\lambda}{x}, \lambda\in\mathbb{R}\}$ et, à l'aide de la méthode de la variation de la constante, on trouve $x\mapsto \frac{\exp(x)}{x}$ comme solution particulière.
Ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$: $\{x\mapsto \frac{\lambda+\exp(x)}{x}, \lambda\in\mathbb{R}\}$.
Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$:
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{x\mapsto \frac{\mu}{x}, \mu\in\mathbb{R}\}$ et, à l'aide de la méthode de la variation de la constante, on trouve $x\mapsto \frac{\exp(x)}{x}$ comme solution particulière.
Ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$: $\{x\mapsto \frac{\mu+\exp(x)}{x}, \mu\in\mathbb{R}\}$
y solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R}_+^*, y(x) = \frac{\lambda+\exp(x)}{x} \text{ où } \lambda\in\mathbb{R} \\ \forall x\in\mathbb{R}_-^*, y(x) = \frac{\mu+\exp(x)}{x} \text{ où } \mu\in\mathbb{R} \\ y \text{ est dérivable en } 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soit y une telle fonction. y est dérivable en 0 si et seulement si les dérivées en 0 à gauche et à droite existent et coïncident.

Or, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\exp(x)+\lambda-x}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } \lambda = -1 \\ \pm\infty \text{ sinon.} \end{cases}$.

Et, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\exp(x)+\mu-x}{x^2} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } \mu = -1 \\ \pm\infty \text{ sinon.} \end{cases}$.

Donc il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui est $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ \frac{\exp(x)-1}{x} \text{ sinon.} \end{cases}$.

Exercice 15:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$, donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$ d'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}$$

Or $\cos(x)x - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$, donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 16:

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^3 + nx - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Une étude de sa dérivée montre qu'elle y est strictement croissante.
   De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$
   Finalement, f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le réel 0 a donc un unique antécédent par f_n. On le note x_n et il vérifie $f_n(x_n) = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = -1$ et $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^3}$. Comme $-1 \leqslant 0 \leqslant \frac{1}{n^3}$, par croissance de f_n^{-1}, $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

   Par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. On va maintenant essayer d'affiner le comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

3. x_n est solution de l'équation (E_n) donc $x_n^3 + nx_n = 1 \Leftrightarrow nx_n = 1 - x_n^3$.
   Par passage à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$. Donc, $x_n \sim \dfrac{1}{n}$ donc $x_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

4. $x_n \sim \dfrac{1}{n}$ donc $x_n^3 \sim \dfrac{1}{n^3}$ donc $x_n^3 = \dfrac{1}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

   On remplace dans (E_n).

   $$nx_n = 1 - x_n^3 \quad = \quad 1 - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

   Et finalement,

   $$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Exercice 17:

$$f(x) = \mathbf{e}^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{\ln(x)}{x}+\frac{\ln^2(x)}{2x^2}+\mathcal{O}\left(\frac{\ln^2(x)}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x+\ln(x)+\frac{\ln^2(x)}{2x}+\mathcal{O}\left(\frac{\ln^2(x)}{x}\right)$$

Exercice 18: Soit $f: \begin{array}{ccc} [-1,+\infty[& \longrightarrow & [-\mathbf{e}^{-1},+\infty[\\ x & \longmapsto & x\mathbf{e}^x \end{array}$.

La fonction f est dérivable et $f' : x \mapsto (x+1)\mathbf{e}^x$ est strictement positive sur $]-1,+\infty[$ et s'annule uniquement en 1. Donc f est strictement croissante et continue donc elle réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ à valeurs dans $[f(-1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [-\mathbf{e}^{-1},+\infty[$. On a, pour tout $y \in]0,+\infty[$, $f(f^{-1}(y)) = y$ i.e.

$$f^{-1}(y)\mathbf{e}^{f^{-1}(y)} = y\,.$$

On passe au logarithme et on divise par $f^{-1}(y)$,

$$\frac{\ln(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y)}+1 = \frac{\ln(y)}{f^{-1}(y)}\,.$$

De plus, par croissance comparée et en utilisant le fait que $f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\frac{\ln(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y)} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Conclusion : $f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} \ln(y)$.

Exercice 19: Soit $f : x \mapsto x-\ln(x)$ définie sur $[1;+\infty[$.

La fonction f est dérivable et $f' : x \mapsto 1-\frac{1}{x}$ est strictement positive sur $]1,+\infty[$ et s'annule uniquement en 1. Donc f est strictement croissante et continue donc bijective de $[1,+\infty[$ à valeurs dans $[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [1,+\infty[$.

On remarque déjà que $f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On a, pour tout $y \in [1;+\infty[$, $f(f^{-1}(y)) = y$ i.e.

$$f^{-1}(y)-\ln(f^{-1}(y)) = y$$

En divisant par $f^{-1}(y)$ et en remarquant que $\frac{\ln(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y)} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} y$.

Considérons $f^{-1}(y)-y = \ln(f^{-1}(y)) \underset{y\to+\infty}{=} \ln(y+\mathcal{O}(y)) \underset{y\to+\infty}{=} \ln(y)+\ln(1+\mathcal{O}(1)) \underset{y\to+\infty}{=} \ln(y)+\mathcal{O}(1)$.

Donc $f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{=} y+\ln(y)+\mathcal{O}(\ln(y))$.

On a $f^{-1}(y)-y-\ln(y) = \ln(f^{-1}(y))-\ln(y) = \ln\left(\frac{f^{-1}(y)}{y}\right) \underset{y\to+\infty}{=} \ln\left(1+\frac{\ln(y)}{y}+\mathcal{O}\left(\frac{\ln(y)}{y}\right)\right) \underset{y\to+\infty}{=} \frac{\ln(y)}{y}+\mathcal{O}\left(\frac{\ln(y)}{y}\right)$.

Conclusion : $f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{=} y+\ln(y)+\frac{\ln(y)}{y}+\mathcal{O}\left(\frac{\ln(y)}{y}\right)$.

Exercice 20: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= 1-\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x \\ &= 1-\frac{1}{n}\int_0^1 x\times n\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x \\ &\underset{I.P.P.\mathscr{C}^1}{=} 1-\frac{\ln(2)}{n}+\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

2. Il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \ln(1+y) \leqslant y$ d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\,.$$

Par conséquent, $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc $u_n = 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 21: Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$ et $f(]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[) = \mathbb{R}$. Donc f est bijective de $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$ dans $\mathbb{R}$. D'où 0 admet un unique antécédent par f.
Conclusion : l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$ que l'on note x_n.

On a $-\frac{\pi}{2}+n\pi \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2}+n\pi$. On a donc que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.

On s'intéresse à la quantité $x_n - n\pi$.
On a $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$. De plus, $x_n - n\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
D'où $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}(x_n)$. D'où $x_n - n\pi \underset{+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$. On a donc : $x_n \underset{+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.

On s'intéresse à la quantité $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$.
On a $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \mathrm{Arctan}(x_n) - \frac{\pi}{2} = -\mathrm{Arctan}(\frac{1}{x_n}) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n\pi}$.
D'où $x_n \underset{+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.